26/10/2016

(5) $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

(6) $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

(7) $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

Θέτουμε $\begin{cases} A = a+b \\ B = a-b \end{cases}$ τότε $\begin{cases} a = \frac{A+B}{2} \\ b = \frac{A-B}{2} \end{cases}$

<u>Μετατροπή αθροισμάτων σε γινόμενα</u>

(5) $\Rightarrow \sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

(6) $\Rightarrow \cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

(7) $\Rightarrow \cos B - \cos A = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

(5) $\Rightarrow$ $\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

βάζοντας στη θέση
του B το $-B$ και
αφού $\sin(-B) = -\sin B$

Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων

$$\sin x = \sin\theta \iff \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + (\pi - \theta) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos\theta \iff \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan\theta \iff x = k\pi + \theta \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Ακολουθίες

Ορισμός Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι κάθε συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Αντί για $a(1), a(2), a(3), \ldots, a(n)$ θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Το a_n λέγεται n-οστός όρος της ακολουθίας

$a_1 \to$ πρώτος όρος της ακολουθίας
$a_2 \to$ δεύτερος όρος -ll- -ll-
$a_3 \to$ τρίτος όρος -ll- -ll-

Όταν αναφερόμαστε σε μια ακολουθία όπως παραπάνω θα λέμε "η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή ακολουθία (a_n)

Παραδείγματα

(i) $a_\nu = \nu$ $\rightsquigarrow$ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$

(ii) $a_\nu = \nu^3$ $\rightsquigarrow$ $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 27$, $a_4 = 64$.

(iii) $a_\nu = \sqrt{\nu}$ $\rightarrow$ $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = 2$

(iv) $a_\nu = x^\nu$ όπου $x \in \mathbb{R}$

$a_1 = x$, $a_2 = x^2$, $a_3 = x^3$

(v) Αναδρομικά οριζόμενες ακολουθίες

Μας δίνεται ο πρώτος όρος a_1 και ένας τύπος που ορίζει το $a_{\nu+1}$ συναρτήσει του a_ν.

Παράδειγμα

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{\nu+1} = \sqrt{3 + a_\nu} \end{cases}$$

Για $\nu = 1$ $a_2 = \sqrt{3 + a_1} = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$

Για $\nu = 2$ $a_3 = \sqrt{3 + a_2} = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$

Για $\nu = 3$ $a_4 = \sqrt{3 + a_3} = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}$

Αριθμητικές πρόοδοι

$\begin{cases} a_1 \text{ δίνεται} \\ a_{\nu+1} = a_\nu + \omega \end{cases}$

Γεωμετρικές πρόοδοι

a_1 δίνεται

$a_{\nu+1} = \lambda a_\nu$

Μπορεί σε μια αναδρομική οριζόμενη ακολουθία ο αναδρομικός τύπος να δίνει το γενικό όρο συναρτήσει των δυο προηγουμένων όρων

Πχ. ακολουθία Fibonacci

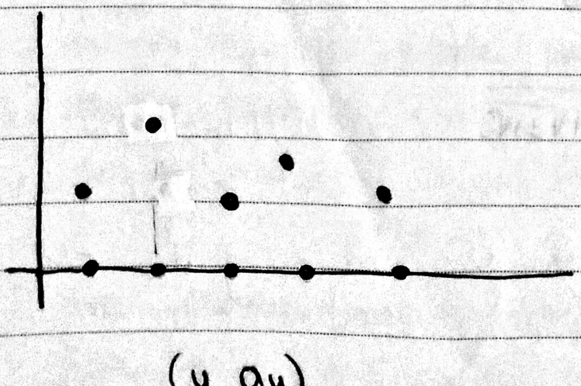
$a_1=1$, $a_2=1$, $a_{\nu+2}=a_\nu+a_{\nu+1}$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

(vii) $a_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \nu \text{ περιττος} \\ \frac{1}{\nu^2} & \nu \text{ άρτιος} \end{cases}$

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{16}$

Γραφική παράσταση ακολουθίας



αποτελείται απο μεμονωμένα σημεία με τετμημένες τους φυσικούς αριθμούς

(ν, a_ν)

Δυο ακολουθίες $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}, (b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέγονται ίσες αν $a_\nu = b_\nu$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$.

<u>Πράξεις μεταξύ ακολουθιών</u>

Αν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες ορίζονται

α) Το άθροισμα τους $(a_\nu + b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$
β) Η διαφορά τους $(a_\nu - b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$
(γ) Το γινόμενο τους $(a_\nu \cdot b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$
(δ) Αν $b_\nu \neq 0$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$ το πηλίκο τους $\left(\frac{a_\nu}{b_\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$.

Το σύνολο των όρων της ακολουθίας $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι το σύνολο $\{a_\nu \ \nu\in\mathbb{N}\}$.

1) $a_\nu = \frac{1}{4}$ το σύνολο των όρων $\{\frac{1}{4} \ \nu\in\mathbb{N}.\}$

2) $b_\nu = (-1)^\nu$ σύνολο όρων $\{-1, 1\}$

3) $\gamma_\nu = (-1)^{\nu+1}$ σύνολο όρων $\{-1, 1\}$

Βλέπουμε ότι μπορεί δυο διαφορετικές ακολουθίες να έχουν το ίδιο σύνολο όρων

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.$
$a_3 = b_1$, $a_4 = b_2$, $a_5 = b_3$

$b_\nu = a_{\nu+2}$

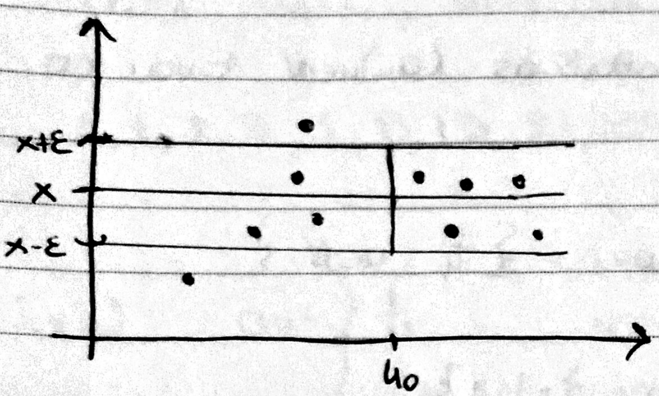
Για μια δεδομένη ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $\kappa\in\mathbb{N}$ δημιουργούμε μια νέα ακολουθία $b_\nu = a_{\nu-\kappa+1}$
(λέγονται ουρές της αρχικής)

Ορισμός Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x\in\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x (και θα συμβολίζουμε $a_n \to x$ ($a_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$))

αν Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq n_0$ να ισχύει $|a_n-x|<\varepsilon$.

$(|a_n-x|<\varepsilon \iff x-\varepsilon<a_n<x+\varepsilon)$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} : |a_n-x|<\varepsilon \quad \forall n\geq n_0$$



~~Παραδείγματα~~ Για να δείξω ότι $a_n\to x$ με χρήση του ορισμ

Έστω $\varepsilon>0$ ...

ορίζουμε $n_0=$ ..

$\forall\, n\geq n_0$ ... $|a_n-x|<\varepsilon$.

Παραδείγματα

1) $a_n=\frac{1}{n}$ Θα δ.ο. $a_n\to 0$ $\quad |a_n-0|<\varepsilon$

Έστω $\varepsilon>0$ επιλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ με $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$ $\quad |\frac{1}{n}-0|<\varepsilon$

Για κάθε $n\geq n_0$ $\quad \frac{1}{n}<\varepsilon$

$n>\frac{1}{\varepsilon}$

$|a_\nu - 0| = |\frac{1}{\nu} - 0| = \frac{1}{\nu} \le \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$

Επομένως $a_\nu \to 0$

2) $a_\nu = \frac{5}{\sqrt{\nu}}$ θα δ.ο $a_\nu \to 0$

Πρόχειρο

$|a_\nu - 0| < \varepsilon$

$|\frac{5}{\sqrt{\nu}} - 0| < \varepsilon$

$\frac{5}{\sqrt{\nu}} < \varepsilon$

$\sqrt{\nu} > \frac{5}{\varepsilon}$

$\nu > (\frac{5}{\varepsilon})^2$

Έστω $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $\nu_0 \in \mathbb{N}$ με $\nu_0 > (\frac{5}{\varepsilon})^2$

Για κάθε $\nu \ge \nu_0$ ισχύει

$|a_\nu - 0| = |\frac{5}{\sqrt{\nu}} - 0| = \frac{5}{\sqrt{\nu}} \le \frac{5}{\sqrt{\nu_0}} < \varepsilon$

Επομένως $a_\nu \to 0$

3) $x_\nu = 7 + \frac{100}{\sqrt[5]{\nu}}$ θα δ.ο $x_\nu \to 7$

$x_\nu - 7 < \varepsilon$

$\frac{100}{\sqrt[5]{\nu}} < \varepsilon$

$\sqrt[5]{\nu} < \frac{100}{\varepsilon}$

$\nu > (\frac{100}{\varepsilon})^5$

Έστω $\varepsilon > 0$ επιλέγω $\nu_0 \in \mathbb{N}$ με $\nu_0 > (\frac{100}{\varepsilon})^5$

Για κάθε $\nu \ge \nu_0$

$|x_\nu - 7| = \frac{100}{\sqrt[5]{\nu}} \le \frac{100}{\sqrt[5]{\nu_0}} < \varepsilon$

Επομένως $x_\nu \to 7$

<u>Πρόταση</u> (Μοναδικότητα ορίου ακολουθίας)

Αν $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε $a_\nu \to x$ $a_\nu \to y$ Τότε $x = y$

<u>Απόδειξη.</u>

Υποθέτω (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x \neq y$

Θέτουμε $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$ τότε $\varepsilon > 0$

Εφόσον $a_n \to x$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - x| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

Εφόσον $a_n \to y$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - y| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Τότε

$$
\begin{aligned}
|x-y| &= |(x - a_{n_0}) + (a_{n_0} - y)| \\
&\leq |a_{n_0} - x| + |a_{n_0} - y| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |x-y|
\end{aligned}
$$

άτοπο

Επομένως $x = y$.

Ορισμός Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται συγκλίνουσα αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to x$.

Το μοναδικό x για το οποίο αυτό συμβαίνει καλείται όριο της ακολουθίας και συμβολίζεται $\lim a_n$ (ή $\lim\limits_{n} a_n$ ή $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$)

Παρατήρηση

Άμεσα από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας προκύπτο[υν] τα εξής

(i) $a_n \to x \iff a_n - x \to 0$

(ii) $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

<u>Ορισμός</u> Έστω (a_n) ακολ. πραγματικών αριθμών.

(i) Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $+\infty$ $(a_n \to +\infty)$ αν $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n > M \quad \forall n \geq n_0$

(ιι) Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $-\infty$
αν $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n < -M$ $\forall n \geq n_0$.

<u>Θεώρημα</u> (ισοσυγκλινουσών ακολουθιών)

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$
τρείς ακολουθίες
ώστε $a_n \leq b_n \leq \gamma_n$ και $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$.
$a_n \to x$ και $\gamma_n \to x$
Τότε $b_n \to x$

<u>Απόδειξη</u>

<u>Έστω $\varepsilon > 0$</u>
Εφόσον $a_n \to x$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$
$\Leftrightarrow$ $\underline{x - \varepsilon < a_n} < x + \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$ (1)

Εφόσον $\gamma_n \to x$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\gamma_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_2$
$\Leftrightarrow$ $x - \varepsilon < \gamma_n < x + \varepsilon$ $\forall n \geq n_2$ (2)

<u>Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.</u>
<u>Για κάθε $n \geq n_0$</u>
(τότε $n \geq n_1$ άρα ισχύει η (1) και $n \geq n_2$ άρα ισχύει η (2))

$\underline{x - \varepsilon < a_n} \leq \underline{b_n} \leq \gamma_n \underline{< x + \varepsilon}$ $\Leftrightarrow$ $|b_n - x| < \varepsilon$

διότι $n \geq n_1$ διότι $n \geq n_2$.   Επομένως $b_n \to x$

Παρατήρηση

Αν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία $\kappa\in\mathbb{N}$ και $x\in\mathbb{R}$.
Τότε $a_\nu \to x \iff a_{\nu-\kappa+1} \to x$

Απόδειξη (εύκολα με χρήση του ορισμού) Άσκηση

Παρατήρηση

Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση η υπόθεση $a_\nu \le b_\nu \le \gamma_\nu$ στο Θεωρ. Ισοσ. ακολ. αρκεί να ισχύει για $\nu \ge \kappa$

Ορισμός

Έστω $(a_\nu)_\nu$ ακολ. πραγμ. αριθμών
Η (a_ν) λέγεται
(i) Αύξουσα αν $a_\nu \le a_{\nu+1}$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$
(ii) Γν. αύξουσα αν $a_\nu < a_{\nu+1}$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$
(iii) Φθίνουσα αν $a_\nu \ge a_{\nu+1}$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$
(iv) Γν. φθίνουσα αν $a_\nu > a_{\nu+1}$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$
(v) Άνω φραγμένη αν $\exists M\in\mathbb{R}$ $a_\nu \le M$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$
(vi) Κάτω φραγμένη αν $\exists m\in\mathbb{R}$ $m \le a_\nu$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$
(viii) φραγμένη αν είναι άνω και κάτω φραγμένη $\iff \exists M>0$ $|a_\nu| \le M$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$

Προτασυ (ορια και διάταξυ)

Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. πραγμ. αρ και $x\in\mathbb{R}$.
ώστε $a_n \to x$

(i) Αν $M\in\mathbb{R}$ ώστε $a_n \le M$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $x\le M$

(ii) Αν $m\in\mathbb{R}$ ώστε $a_n \ge m$ τότε $x\ge m$

Απόδειξη.

(i) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) οτι $x>M$
Θέτοντας $\varepsilon = x-M$ έχουμε $\varepsilon>0$

Εφόσον $a_n \to x$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\ge n_0$
$|a_n - x| < \varepsilon$
$\Updownarrow$
$-\varepsilon < a_n - x < \varepsilon$
$\Rightarrow -(x-M) < a_n - x < x-M$
$\Rightarrow M < a_n$
$a_{n_0} \ge M$ άτοπο Επομένως $x\le M$

(ii) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο)
οτι $x<m$
Θέτοντας $\varepsilon = m-x$ έχουμε $\varepsilon>0$
εφόσον $a_n \to x$
$\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\ge n_0$ $|a_n - x| < \varepsilon$
$-\varepsilon < a_n - x < \varepsilon$
$x-\varepsilon < a_n < \underbrace{x+\varepsilon}_{= m}$
Ειδικότερα $a_{n_0} < m$ άτοπο
Επομένως $x \ge m$.

Πρόταση

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο $\mathbb{R}$ και $x\in\mathbb{R}$ $a_n\to x$

(i) Αν $x>0$ τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $a_n>\frac{x}{2}$ $\forall n\geq n_0$

(ii) Αν $x<0$ τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $a_n<\frac{x}{2}$ $\forall n\geq n_0$

(iii) Αν $x\neq 0$ τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $|a_n|>\frac{|x|}{2}$ $\forall n\geq n_0$

Αποδ.

(i) Εφαρμόσουμε τον ορισμό για $\varepsilon=\frac{x}{2}>0$

(ii) -\\- -\\- ορισμο για $\varepsilon=-\frac{x}{2}>0$

Θεώρημα Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη

Αποδ.

Έστω (a_n) ακολ. πρ. αρ. $x\in\mathbb{R}$ $a_n\to x$

Απο τον ορισμο για $\varepsilon=1$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|a_n-x|<\varepsilon=1$ $\forall n\geq n_0$

Θετουμε $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{n_0}|, 1+|x|\}$
Τότε $|a_n|\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$
Πραγματι έστω $n\in\mathbb{N}$
→ Αν $n\leq n_0$ τότε $|a_n|\leq M$
→ Αν $n>n_0$

$|a_u| = |a_u - x + x| \leq |a_u - x| + |x| < 1 + |x| \leq M.$